

Recherche Operationnelle

Vincent Gripon

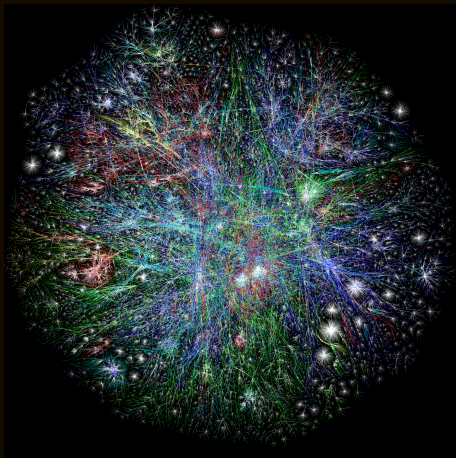
École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Brest

31 mars 2011

Les graphes

C'est quoi un graphe ?

- C'est ça :



C'est quoi un graphe ?

- C'est un couple $\{S, \delta\}$ où :
 - S est un ensemble dénombrable (généralement fini) de sommets,
 - $\delta \subseteq S \times S$ des arêtes (ou arcs) reliant ces sommets.
- Exemple : internet,
- En fait : graphe $\Leftrightarrow$ relation en mathématiques.

Graphes usuels

- Graphes multi-parti : $S = \bigsqcup_i S_i$, $s, s' \in S_i \Rightarrow (s, s') \notin \delta$,
- Graphes petit-monde : on peut se rendre de tout sommet à tout autre sommet en peu d'étapes (typiquement logarithmique en fonction du nombre de noeuds).

Différents types de graphes...

Sur les arêtes...

- Un graphe peut être :
 - **Valué** ou **Pondéré** : $\delta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$,
 - **Non orienté** ou **symétrique** : $\forall s_1, s_2, \delta(s_1, s_2) = \delta(s_2, s_1)$,
 - **Complet** si $\delta^{-1}(0) = \emptyset$,
- Le degré est le nombre d'arrêtes liés à ce noeud (degré sortant + degré entrant).

... et autres

- Un graphe peut également être :
 - **Coloré** s'il est doté d'une fonction $C : S \rightarrow N$,
 - **Planaire** s'il existe une représentation où aucune arête ne se croise...

Autres exemples

- Le réseau routier, internet, la relation $\leq$ sur les entiers naturels, les automates, les arbres...

Chemins

- Un chemin est une suite de sommets $s_1 \dots s_n$ telle que :
 - $\forall 1 \leq i < n, \delta(s_i, s_{i+1}) \neq 0$ (ou $\forall 1 \leq i < n, (s_i, s_{i+1}) \in \delta$ s'il n'est pas valué),
- Sa longueur est $n - 1$ le nombre d'arêtes qu'il décrit,
- Son poids est la somme des poids de ses arêtes (sa longueur s'il n'est pas valué).

Simplex mais pas si élémentaires

- Il peut être :
 - **Simple** s'il ne passe qu'une seule fois par chacun des arcs,
 - **Élémtaire** s'il ne passe qu'une seule fois par sommet.
- $\{\text{Élémtaires}\} \subseteq \{\text{Simplex}\}$,
- Une chaîne est Eulérienne si elle passe par tous les arcs une et une seule fois.

Cycles, connexité

- Un chemin est un cycle si $s_n = s_1$ (et s'il est simple dans le cas d'un graphe symétrique),
- Un graphe Hamiltonien est un graphe qui possède un cycle élémentaire qui passe par tous ses sommets,
- Un graphe est connexe si pour tout couple de sommets, il existe un chemin les reliant (dans un sens ou dans l'autre).

Arbres

- Un arbre est un graphe connexe sans cycle,
- Plusieurs arbres forment une forêt (logique !),
- Partant d'un sommet s_i , le déroulement d'un graphe est l'arbre constitué des chemins élémentaires les plus longs qui partent de ce sommet.

Parcourir un graphe, c'est quoi ?

Exemples

- Je veux sortir d'un labyrinthe,
- Je veux connaître le plus court chemin jusqu'à un autre noeud,
- Je veux connaître l'ensemble des noeuds que je peux atteindre, qui m'atteignent,
- Je veux savoir si je peux revenir à mon point de départ...

Deux philosophies

- Parcours en profondeur d'abord,
- Parcours en largeur d'abord.