TP 3 optimisation : gradient optimal, gradient conjugué

1 Gradient optimal

On considère une fonction du type

$$F(X) = \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle b, X\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

où on a noté $X = (x_1, \ldots, x_n)$, A une matrice symétrique définie positive $A = [a_{ij}]$ et b un vecteur colonne $b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Question 1 : développer la fonction F ci-dessus dans le cas $n = 2$ puis dans le cas général.

Question 2 : calculer $\nabla F(X)$ -on pourra commencer par $n = 2$- et en déduire que la minimisation de F équivaut à la résolution du système $AX = b$.

Remarque : Dans ce cas, la minimisation de F nous donne donc une nouvelle méthode itérative de résolution d'un système linéaire. Attention, cette méthode n'est adaptée que pour A symétrique définie positive, ce qui rend la fonction F convexe.

Question 3 : coder l'algorithme du gradient à pas optimal pour le cas considéré ici. On notera $w^{(n)} = \nabla F(X^{(n)})$ et on exprimera $X^{(n+1)}$ en fonction de $X^{(n)}$, de A et de $w^{(n)}$. Appliquer ensuite l'algorithme à la minimisation de la fonction de 7 variables donnée par

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_7) \quad = \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{7} x_i^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 \\ & +x_4x_5 + x_6x_7 - 4x_1 - 8x_2 - 12x_3 - 16x_4 - 20x_5 - 24x_6 - 20x_7 \end{aligned}$$

2 Gradient conjugué

Question 1 : Coder l'algorithme du gradient conjugué pour la résolution d'un système linéaire $Ax = b$, A étant symétrique définie positive.

Question 2 : On veut résoudre le système linéaire $Ax = b$, où A est la matrice de Hilbert de taille 10 (la matrice de Hilbert a pour terme général $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$), et b est tel que la solution du système soit $x = (1, 1, \ldots, 1)^T$ (i.e. $x = ones(10, 1)$). Utiliser successivement l'algorithme du gradient optimal sur 10000 itérations, et celui du gradient conjugué sur 12 itérations.