TPII : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Question préliminaire : coder les méthodes d'Euler explicite et implicite et de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) pour un problème de Cauchy quelconque et en dimension quelconque. Les arguments seront, outre la fonction f du problème $y' = f(t, y)$, le pas d'intégration h, les bornes a et b de l'intervalle d'intégration, et la condition initiale y_0.

Les équations de Lotka-Volterra (1925-26) sont un couple d'équations différentielles non-linéaires du pemier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes d'interaction entre une population de prédateurs et une population de proies (ou plus curieusement en dynamique interneuronale). Elles s'écrivent fréquemment

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) &= -y(t)(\gamma - \delta x(t)) \end{aligned} \tag{0.1}$$

où $x(t)$ est le nombre de proies, $y(t)$ celui des prédateurs, t est le temps, α, β γ et δ sont des paramètres.

1. Commenter ce système : en quoi décrit-il une situation "naturelle" ?
2. Tracer le champ de vecteurs associé à ce système (commande `champ`).
3. On fixe tous les paramètres à la valeur 1. On considère aussi $x(0) = y(0) = 1/2$. Ecrire une fonction `scilab` pour restituer les valeurs de la solution approchée obtenue via la méthode d'Euler (explicite), et afficher d'une part un graphe comportant les deux courbes $(t, x(t))$ et $(t, y(t))$, d'autre part le graphe des évolutions conjontes $(x(t), y(t))$. La simulation sera faite sur l'intervalle $[0, 150]$ avec 3 cas : $h = 0.05, h = 0.01$, et $h = 0.005$.
4. Même question avec Euler implicite.
5. Même question avec RK4.
6. Même question avec la méthode utilisée par défaut (`ode`).
7. Que pensez-vous des résultats obtenus ?