
TPI : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

---

1 Premier pas

Soit le problème de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} u'(t) = 3u(t) - 3t \\ u(0) = \alpha \end{array} \right.$$

1. Montrer que ce problème admet une solution unique, puis déterminer cette solution.
2. On suppose $\alpha = 1/3$. Calculer $u(10)$, où u est la solution exacte. Utiliser la commande `ode` pour vérifier numériquement ce résultat.
3. On suppose maintenant $\alpha = 0.3333333$. Résoudre à nouveau le problème sous `scilab`. Qu'observe-t-on ? Est-ce un problème d'imprécision numérique de la méthode utilisée par défaut sous `scilab` ?

2 Une équation linéaire

On considère le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = y(x) - x, \ x \in [0; 3] \\ y(0) = 1.5 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

1. Donner la solution exacte de ce problème, après en avoir montré l'unicité.
2. Utiliser la commande `ode` pour tracer la courbe $C_1 = \{(x, y(x)), \ x \in [0, 3]\}$ obtenue par la méthode utilisée par défaut sous `scilab`.
   On tracera la courbe pour $h = 0.5$, $h = 0.2$, $h = 0.01$. Que vaut la solution approchée en $x = 0.8$ pour un pas $h = 0.2$?
3. Tracer également et pour les mêmes discrétisations la courbe C_{ex} de la solution exacte (après avoir défini cette dernière) au moyen de la commande `plot2d`.
4. Coder la méthode d'Euler et l'appliquer au problème (2.1) (mêmes pas).

3 Un système linéaire : Oscillateur harmonique

On considère le système différentiel suivant :

$$V'(t) = \left[\begin{array}{c} x'(t) \\ y'(t) \end{array} \right] = F(V(t)) = F\left(\left[\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{c} y(t) \\ -x(t) \end{array} \right]$$

F est donc donnée par :

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \end{array}$$

1. Résoudre analytiquement cette équation.
2. Utiliser la commande `ode` pour tracer sur le même graphe et pour $t \in [0, 6\pi]$ les courbes $(t, x(t))$ et $(t, y(t))$, et sur un autre graphe la courbe $(x(t), y(t))$, approchée par la méthode utilisée par défaut sous `scilab`. On choisira un pas de taille $\simeq 2\pi/n$ et on fera varier n pour constater la précision.
3. Programmer et appliquer la méthode d'Euler pour résoudre cette équation. On prendra les mêmes pas que pour la question précédente. Que remarque-t-on ? Pouvait-on prévoir simplement ce phénomène ?
4. Mêmes questions avec la méthode d'Euler implicite.
5. Proposer une méthode pour ce problème.